Institut National des Télécommunications

■ Epreuve de mathématiques (mathématiques spéciales)

PROBLEME 1

Les parties 1 et 2 sont indépendantes ; cependant, la question 3 de la partie 2 utilise un résultat analogue à celui démontré dans la partie 1, question B.1.

⌘⌘⌘⌘⌘⌘⌘

PARTIE 1

A. Existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

A.1

Montrer que : $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ existe.

A.2

Montrer que : $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ existe et en déduire l'existence de l'intégrale I.

B. Expression de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ **sous forme de limite d'une intégrale.**

B.1

Soient b et λ deux réels strictement positifs et g une fonction continument dérivable sur $[0,b]$.

Montrer que l'on peut trouver une constante réelle positive M, indépendante de λ, telle que :

$$\left| \int_0^b g(x)\sin(\lambda x)\,dx \right| \leq \frac{M}{\lambda}$$

En déduire que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^b g(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$$

On admettra que ce dernier résultat reste valable si la fonction g est seulement continue sur $[0,b]$.

B.2

Soit f une fonction continue sur $[0,b]$ et possédant une dérivée à droite à l'origine.

a) Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^b f(x)\frac{\sin(\lambda x)}{x}dx = f(0) \cdot \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x}dx \qquad (1)$$

b) En déduire que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^b f(x)\frac{\sin(\lambda x)}{x}dx = f(0) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad (2)$$

C. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$

C.1

a) Montrer que, si n est un entier naturel non nul:

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{p=n} \cos(p\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

b) Montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx$$

est une intégrale convergente et que sa valeur est indépendante de n ($n \in \mathbb{N}$)

C.2

Soit la fonction f définie par :

$$u \to f(u) = \begin{cases} \dfrac{u}{\sin(u)} & si \quad 0 < u \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & si \quad u = 0 \end{cases}$$

En utilisant cette fonction f et les résultats précédents, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

PARTIE 2

1°) On considère une suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} \lambda u_{n+1} - (1+\lambda^2)u_n + \lambda u_{n-1} = 0 \quad n \in N^* \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

où λ est un réel non nul tel que $|\lambda| < 1$.
On suppose de plus que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, λ, *et* u_0.

2°) Soit l'intégrale : $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2}\, dx$

a) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a la relation :

$$(1+\lambda^2)a_n - \lambda(a_{n+1} + a_{n-1}) = 0$$

b) Trouver une relation entre a_0 et a_1.

3°) Soit la fonction réelle f définie pour x dans $\mathbb{R}$ par :

$$x \to f(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos(x)}$$

où λ est un réel non nul tel que $|\lambda| < 1$.

a) Calculer les coefficients de Fourier associés f.

b) Que peut-on dire de la série de Fourier associée à f ?

c) Sur cet exemple, prouver la convergence normale de la série de Fourier associée à f sans utiliser un théorème du cours.

PROBLEME 2

Avertissement : *toute hypothèse introduite en cours d'énoncé reste valable dans la suite du problème.*

On considère un espace vectoriel E de dimension $(n+1)$ sur un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si f est un endomorphisme de E, la notation Im(f) représente le sous espace image de E par f. L'endomorphisme nul de E sera noté : O, et la composition de deux endomorphismes f et g de E sera notée $f \circ g$.

1°) Soient $E = A \oplus B$ une décomposition en somme directe de E.

a) Montrer qu'il existe un couple unique (p,q) de projecteurs tels que :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{A} \; ; \; \mathrm{Im}(q) = \mathrm{B}$$

et

$$id_E = p + q$$

où id_E représente l'application identique de E.

b) On considère un endomorphisme u de E. Montrer qu'il existe un couple unique (v, w_1) d'endomorphismes de E tel que :

$$\begin{cases} u = v + w_1 \\ \mathrm{Im}(v) \subset A \;\; et \;\; \mathrm{Im}(w_1) \subset B \end{cases}$$

On précisera les expressions de v et w_1 en fonction de u, p, et q.

2°) On suppose désormais que l'endomorphisme u est tel que :

$$\forall\, x \in A, \quad u(x) \in A$$

a) Montrer que l'hypothèse précédente est équivalente à la condition :

$$q \circ u \circ p = \mathrm{O}$$

En déduire que : $w_1 = w_1 \circ q$.

b) Montrer qu'il existe un couple unique (v, w) avec v, endomorphisme de E et w application linéaire de B dans E, tels que

$$\begin{cases} u = v + (w \circ q) \\ \mathrm{Im}(v) \subset A \;\; et \;\; \mathrm{Im}(w) \subset B \end{cases}$$

3°) E étant muni d'une base $(e_i)_{i=0,1,\ldots,n}$, soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments de K non tous nuls.

On suppose désormais que A est l'ensemble des vecteurs $x \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ avec $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x_i = 0$.

a) Quelles sont alors les dimensions respectives de A et B. En déduire que w est une homothétie vectorielle.

b) Montrer que si le sous-espace A est fixé, le rapport de l'homothétie vectorielle w est indépendant du choix de B (supplémentaire de A dans E).